

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

Concours Général de Physique Minko Balkanski 1998

La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en français, seront prises en compte dans la note finale.

La durée de la composition est de **4 heures**.

Problème I

L'énergie potentielle d'une masse ponctuelle m soumise au champs de gravitation d'une planète sphérique de rayon R et de masse M est donnée par $E = -\frac{GMm}{r}$, où G désigne la constante de gravitation et r est la distance de la masse au centre de la planète.

1. Quelle est la dimension de G ?
2. Un objet quittant la surface de la planète avec une vitesse v s'éloigne à l'infini si v est supérieure ou égale à une vitesse critique v_l qui s'appelle par définition la vitesse de libération. Montrer, à partir du théorème de conservation de l'énergie mécanique que $v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.
3. Vérifiez que dans cette formule les dimensions sont correctes.
4. Quel doit être le rayon de la planète pour que cette vitesse soit égale à la vitesse de la lumière c ?
5. La vitesse de libération sur la Terre est de 10km/s et son rayon est de 6400km . Calculer le rayon d'un astre pour lequel $v_l = c$ et dont la masse est égale à celle de la terre. On prendra $c = 300000\text{km/s}$.
6. Sachant que la masse volumique de la terre est de 5500kg/m^3 , en déduire la masse volumique de cet astre. Commentez. Un astre pour lequel $v_l = c$ s'appelle un trou noir. Pourriez-vous expliquer pourquoi?
7. La densité des trous noirs diminue lorsque leur masse augmente. Expliquez ce paradoxe.

Problème II

Deux sphères de même rayon et de même masse m portent la même charge positive q . Une des deux sphères est fixe en O , l'autre se déplace sans frottement sur l'axe vertical Oz . Sa position est repérée par son hauteur z au dessus de O .

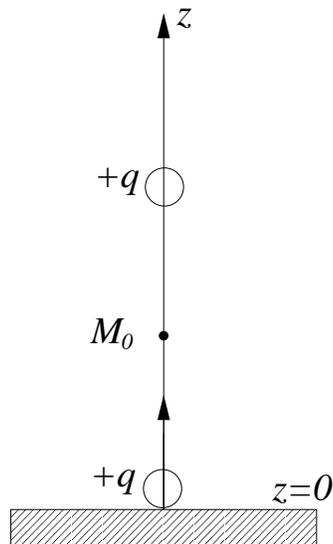


fig.1

- 1.a. Déterminez la position d'équilibre M_0 , définie par z_0 de la sphère mobile.
- 1.b. En termes de forces, qu'appelle-t-on équilibre stable? équilibre instable? Quel est le type de l'équilibre de la sphère mobile?
- 1.c. Calculez numériquement z_0 . On donne $m = 0,1g$, $q = 10nC$, $g = 10m/s^2$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 S.I.$
- 2.a. Quelle est l'énergie potentielle $E_p(z)$ de la sphère mobile? (on choisit l'énergie de pesanteur nulle en $z = 0$).
- 2.b. En terme d'énergie, comment détermine-t-on l'équilibre? le type d'équilibre?
- 2.c. Retrouvez la position d'équilibre et le type d'équilibre à partir de $E_p(z)$.
- 2.d. Tracer $E_p(z)$.
3. On lâche sans vitesse initiale la sphère mobile d'une hauteur $H > z_0$.
- 3.a. Quelle est l'énergie mécanique $E_m(z)$ de la bille mobile? Que peut-on dire de cette énergie? Tracez la courbe $E_m(z)$ sur le graphe de $E_p(z)$.
- 3.b. Décrivez le mouvement de la bille en 5 lignes maximum.
- 3.c. Écrivez l'équation à laquelle satisfait la valeur minimale h_m de z .
- 3.d. Placez les deux points correspondants à $z = H$ et $z = h_m$ sur le graphe.
- 3.e. Calculez numériquement h_m . On donne $H = 0,1m$.
- 3.f. Quelle est la valeur numérique de l'énergie cinétique de la sphère au passage en M_0 ?
- 3.g. De quelle hauteur minimale $H > z_0$ doit-on lâcher la bille pour que celle-ci touche la bille immobile? Le rayon de chaque bille est $r = 2mm$.

Problème III

1. L'effet Doppler consiste en une différence entre la fréquence f d'une onde émise par une source S et la fréquence f' de l'onde lorsqu'elle est reçue par un observateur O en fonction de la vitesse radiale V de O par rapport à S . On montre que ces deux fréquences sont reliées par $f' = f(1 - \frac{v}{c})$, où c est la vitesse de propagation de l'onde.
 - 1.a. Quelle relation relie f , c et la longueur d'onde λ ?
 - 1.b. La raie d'absorption H_α de l'hydrogène a une longueur d'onde en laboratoire $\lambda_a = 656,28nm$ et $\lambda'_a = 656,40nm$ dans le spectre de l'étoile d'Aldébaran. Quelle est la vitesse d'Aldébaran par rapport à la Terre?
 - 1.c. Calculez la longueur d'onde λ'_δ de la raie H_δ de l'étoile Aldébaran sachant qu'en laboratoire on a $\lambda_\delta = 410,17nm$.
 - 2.a. Un satellite est en orbite circulaire à une distance d autour d'une étoile fixe de masse M (fig.2). Quelle sont les forces exercées sur le satellite? En exprimant l'équilibre de ces forces calculez la période de révolution T et la vitesse du satellite en fonction de G , M et d .

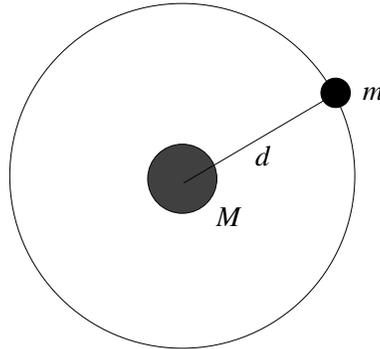
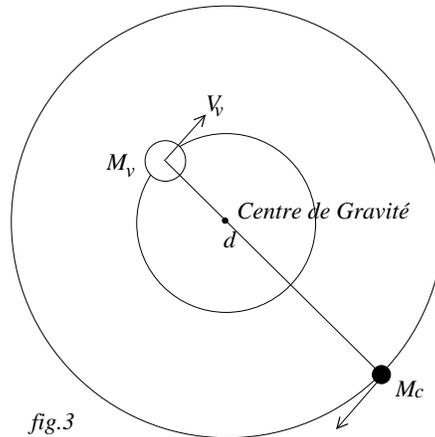


fig.2

Un système binaire est constitué de deux étoiles de masse M_v et M_c . La distance entre les deux étoiles d est constante. Les étoiles suivent des trajectoires circulaires autour du centre de gravité qui reste fixe (fig.3).



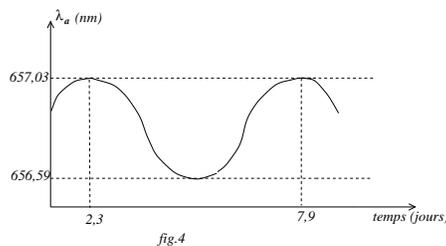
2.b. La période de révolution de chacune des deux astres autour du centre de gravité est égale à T , calculé en 2.a) avec $M = M_v + M_c$. Montrez que la vitesse V_v de l'étoile de masse M_v par rapport au centre de gravité est égale à :

$$\sqrt{\frac{GM_c^2}{(M_c + M_v)d}}$$

2.c. Exprimez d en fonction de V_v , T , M_v et M_c et montrez la relation :

$$\frac{M_c^3}{(M_c + M_v)^2} = \frac{V_v^3 T}{2\pi G}$$

3. Dans le système binaire Cygnus X-1 l'une des étoiles est visible, l'autre est sombre (c'est à dire elle émet un rayonnement tellement faible qu'il ne peut pas être détecté sur Terre). On dispose des résultats expérimentaux de la figure 4 qui donnent la variation de la longueur d'onde de la raie d'absorption H_α de l'étoile visible en fonction du temps.



3.a. Calculer les vitesses minimale et maximale V_{min} et V_{max} de l'étoile par rapport de la Terre.

3.b. Le centre de gravité du système possède une vitesse V constante par rapport à la Terre. Exprimez V_{min} et V_{max} en fonction de V et V_v (les deux étoiles, le centre de gravité et la Terre sont dans le même plan).

3.c. En déduire les valeurs de V et V_v .

3.d. En exploitant la figure 4 donnez la valeur numérique de la période de révolution T . Justifiez votre réponse.

3.e. Calculez M_c en utilisant le résultat de 2.c) sachant que $M_v = 3,0 \cdot 10^{31} \text{ kg}$ et $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I.}$.